Chapitre IV

Application en fiabilité

1 Fiabilité d'un élément

1.1 Schéma général

Un élément passe par plusieurs phases au cours de son utilisation :

- Mean Time To Failure (MTTF) : durée moyenne de bon fonctionnement avant la première défaillance,
- Mean Down Time (MDT) : durée moyenne d'indisponibilité (détection et réparation de la panne, remise en service),
- Mean Up Time (MUT) : durée moyenne de bon fonctionnement après réparation,
- Mean Time Between Failure (MTBF) : durée moyenne entre deux défaillances consécutives.

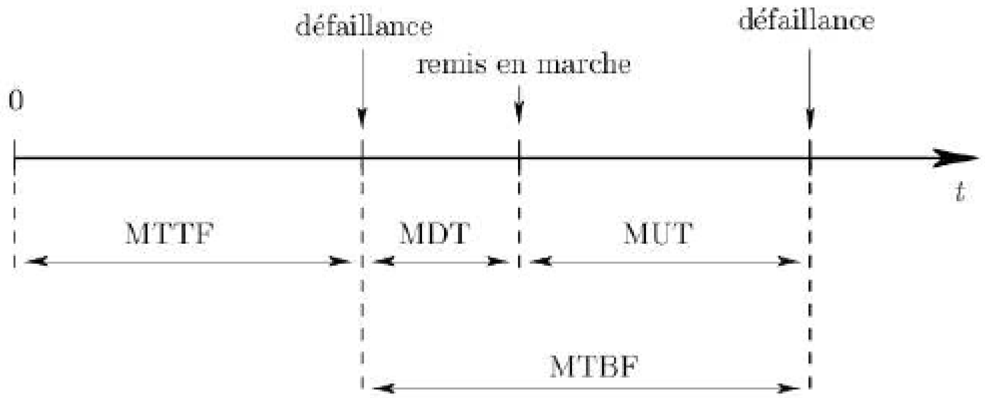


FIG. IV.1 - Schéma général de la fiabilité d'un élément

Dans la pratique, la MDT est faible par rapport à la MUT et donc on considère souvent que MUT $\simeq$ MTBF.

Définition 31 Soit T la durée de bon fonctionnement de l'élément. On appelle *fiabilité* (en anglais, *reliability*) à l'instant t, la probabilité qu'il n'y ait pas de défaillance avant l'instant t, c'est-à-dire :

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t)$$

Remarques 18

1. On a $R(0) = 1$ et $R(+\infty) = 0$. Autrement dit, l'élément n'a subi aucune défaillance avant d'être utilisé! L'autre égalité nous dit que l'élément n'est pas immortel !
2. On appelle *défiabilité* la quantité $F(t) = 1 - R(t)$, qui est aussi la fonction de répartition.

Proposition 9 Soit T la durée de bon fonctionnement, on a : MTTF = IE(T).

Proposition 10 On peut montrer que :

$$\text{MTTF} = \int_0^{+\infty} R(t)dt \ .$$

1.2 Elément non réparable

Dans le cas d'un élément non réparable, il n'y a ni MDT, ni MUT, ni MTBF. On ne calcule donc que le MTTF.

1.3 Elément réparable

Deux cas sont à envisager.

- Soit on remplace l'élément par un élément neuf: en supposant le MDT proche de 0, on a $\text{MTBF} \simeq \text{MTTF}$.
- Soit on répare l'élément, mais il ne repart pas de 0.

Définition 32 On définit le MTBF par :

$$\text{MTBF} = \lim_{n \to +\infty} \text{IE}\left(M_n\right)$$

où M_n est le temps de bon fonctionnement de la $n^{ième}$ période.

Proposition 11 Si M_n est stationnaire, alors MTBF = MTTF.

1.4 Taux de défaillance

Définition 33 Le *taux de défaillance moyen* sur l'intervalle de temps [t; $t + \Delta t$] est la probabilité d'avoir une défaillance entre t et $t + \Delta t$, sachant qu'il n'y a pas eu de défaillance avant t, divisé par Δ t. Autrement dit :

$$\lambda\left(t; t+\Delta t\right) = \frac{1}{\Delta t} \text{IP}\left(t \le T \le t + \Delta t \mid T > t\right)$$

Définition 34 On définit le *taux de défaillance instantané* par :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \lambda(t; t + \Delta t)$$

Proposition 12 On a les égalités suivantes :

1. $\lambda(t) = -\dfrac{R'(t)}{R(t)}$.
2. $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$.
3. $F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u)du} = 1 - R(t)$.

Dans la pratique, le taux de défaillance d'un élément passe par plusieurs phases, qui correspondent à la vie de cet élément :

- le rodage : les pannes sont dues essentiellement à des défauts de fabrication ou de conception (par exemple, on change une ampoule et celle-ci claque dès qu'on allume la lumière),
- la vie utile : les pannes sont dues au hasard,
- le vieillissement : les pannes sont dues à l'usure croissante de l'élément.

Ces trois phases sont respectivement décroissante, constante et croissante :

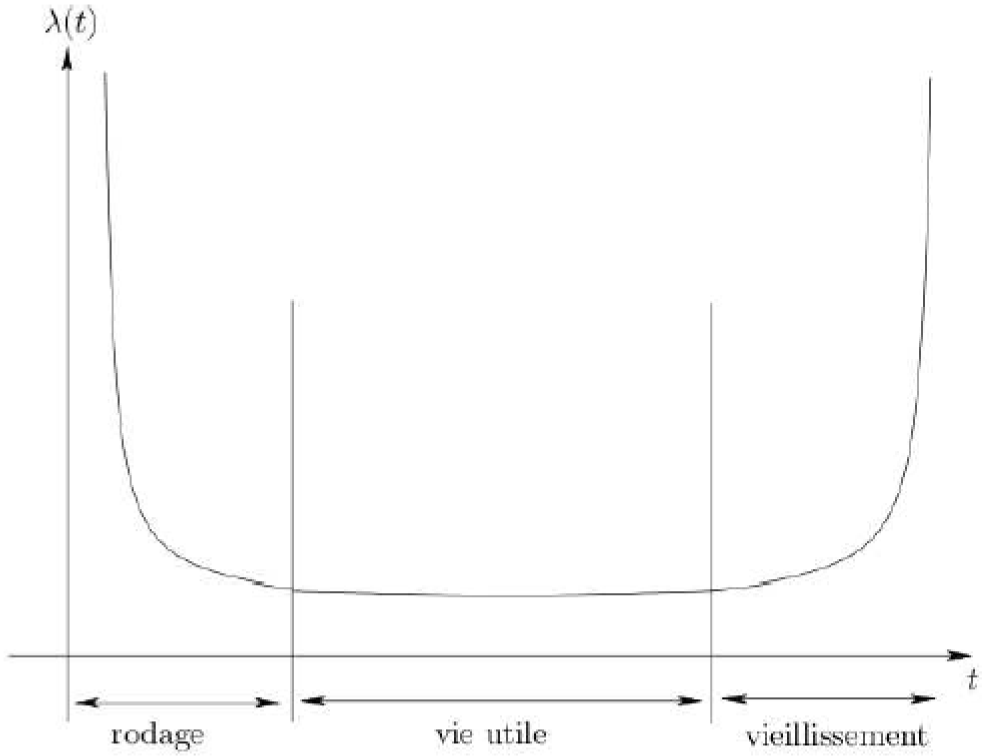


FIG. IV.2 - Taux de défaillance d'un élément en fonction du temps.

2 Fiabilité d'un système

Dans toute la suite du chapitre, on supposera que les temps de bon fonctionnement des éléments sont indépendants entre eux.

2.1 Système en série

FIG. IV.3 - Système de *n* éléments en série.

Le système fonctionne si et seulement si tous les éléments fonctionnent. On a :

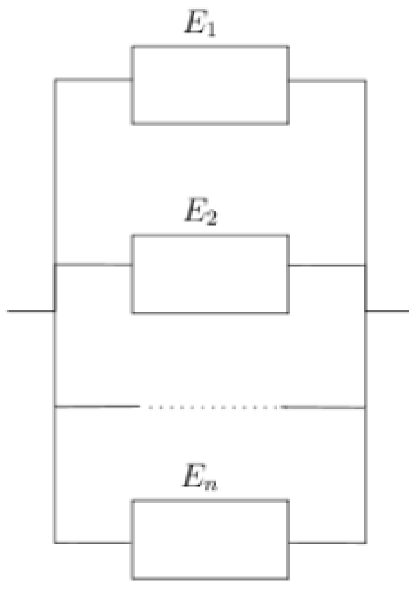
$$R_S(t) = \mathrm{IP}\left(T_{E_1} > t \cap T_{E_2} > t \cap \ldots \cap T_{E_n} > t\right)$$

$$R_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{IP}\left(T_{E_i} > t\right) = \prod_{i=1}^{n} R_{E_i}(t)$$

Proposition 13 Le taux de défaillance du système est égal à la somme des taux de défaillances des éléments en série. Autrement dit :

$$\lambda_S(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{E_i}(t)$$

2.2 Système en parallèle



TAB. IV.4 - Système de *n* éléments en parallèle

Le système fonctionne si et seulement si au moins un des éléments fonctionne. On a :

$$R_P(t) = \mathrm{IP}\left(T_{E_1} > t \cup T_{E_2} > t \cup ... \cup T_{E_n} > t\right)$$

Rappel 1 On a l'égalité suivante : $\mathrm{IP}\left[\left(A \cup B\right)^c\right] = \mathrm{IP}\left(A^c \cap B^c\right)$

D'après le rappel, on a donc :

$$\begin{aligned} R_P(t) &= 1 - \mathrm{IP}\left(\left(T_{E_1} > t\right)^c \cap \left(T_{E_2} > t\right)^c \cap ... \cap \left(T_{E_n} > t\right)^c\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathrm{IP}\left(T_{E_i} \le t\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1\text{-}\mathrm{IP}\left(T_{E_i} > t\right)\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1\text{-}R_{E_i}(t)\right) \end{aligned}$$

Remarque 19 Il n'existe pas de relation simple entre le taux de défaillance du système et celui des taux de défaillance des n éléments.

2.3 Système mixte

Dans certains cas, les systèmes en parallèle et les systèmes en série sont mélangés. Il est possible alors d'avoir des systèmes comme celui de la figure :

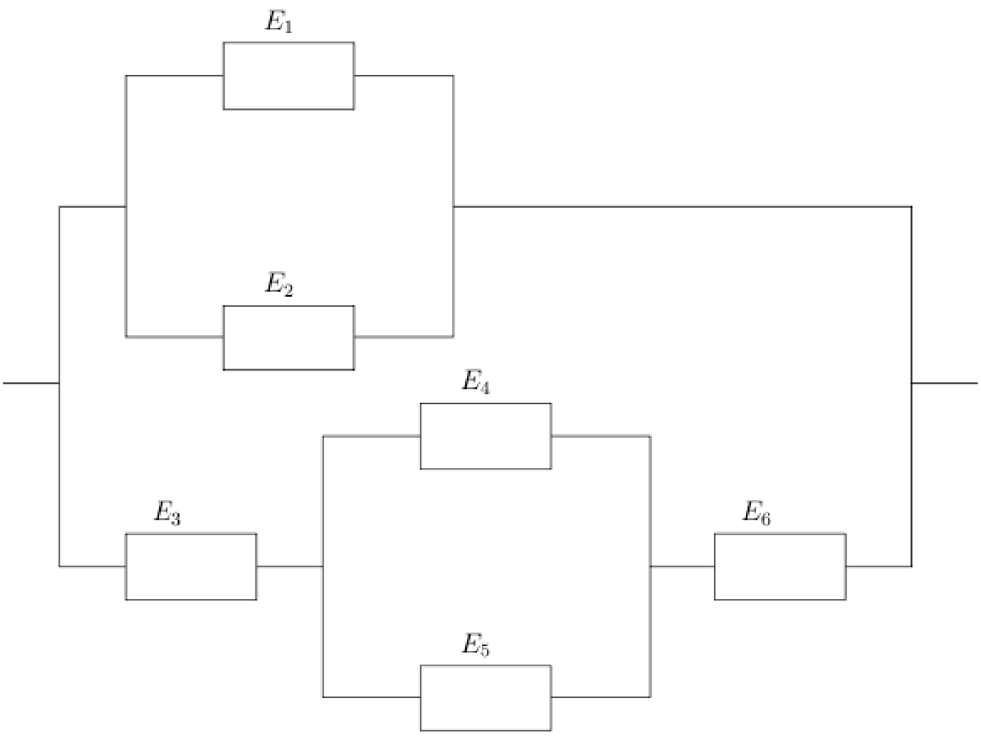
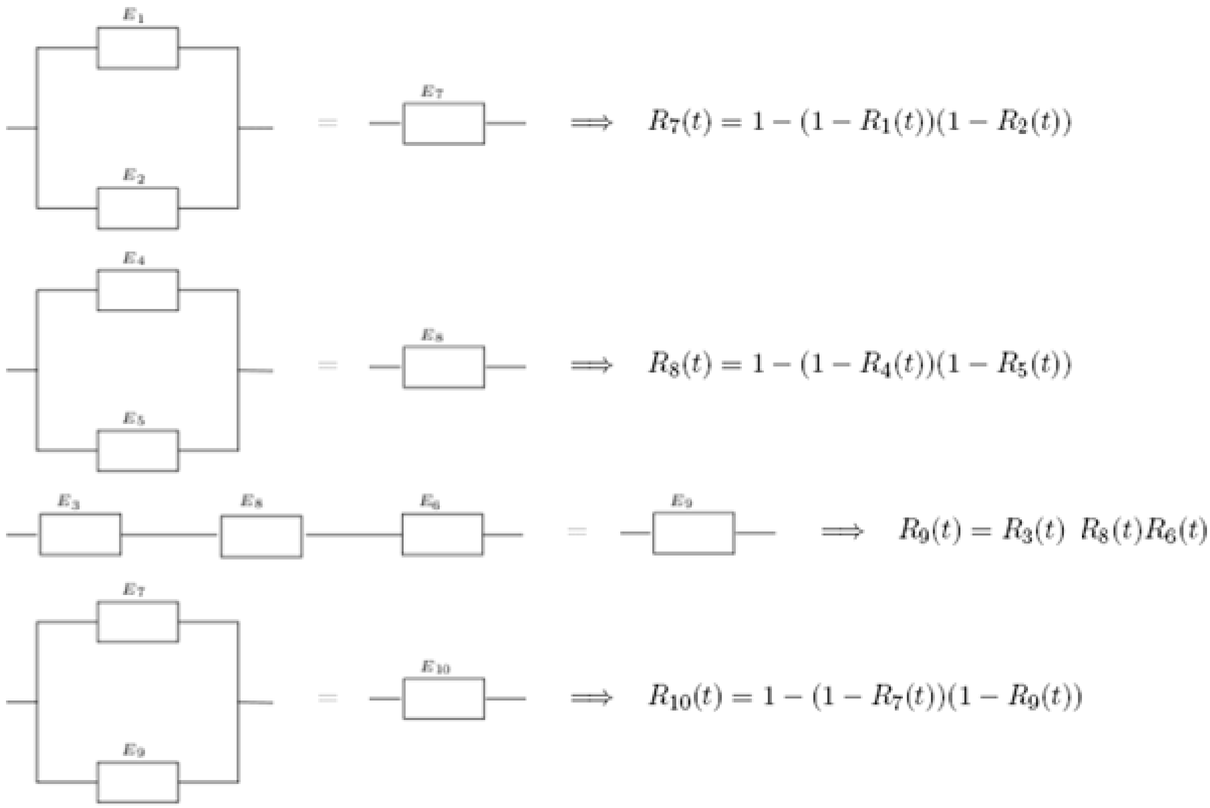


FIG. IV.5 – système mixte.

Définition 35 Un système *mixte* est un système qui peut être décomposé en sous-systèmes en parallèle et/ou en série.

Pour calculer la fiabilité du système de la figure IV.5, nous allons le décomposer en sous-systèmes :



$R_{10}(t)$ est alors la fiabilité du système mixte. On a :

$R_{mixte}(t) = 1 - (1 - (1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))))(1 - R_3(t)(1 - (1 - R_4(t))(1 - R_5(t)))R_6(t))$

2.4 Système à redondance active *r*/*n*

Le système fonctionne si et seulement si au moins *r* éléments sur *n* fonctionnent. On peut montrer qu'on a alors :

$$R_{r/n}(t) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k \left(R(t)\right)^k \left[1 - R(t)\right]^{n-k}$$

si tous les éléments ont même fiabilité $R(t)$.
Nous n'écrirons pas la formule dans le cas contraire.

Remarque 20 Dans le cas où $r = 1$, c'est un système parallèle. Dans le cas où $r = n$, c'est un système en série.

2.5 Autres systèmes

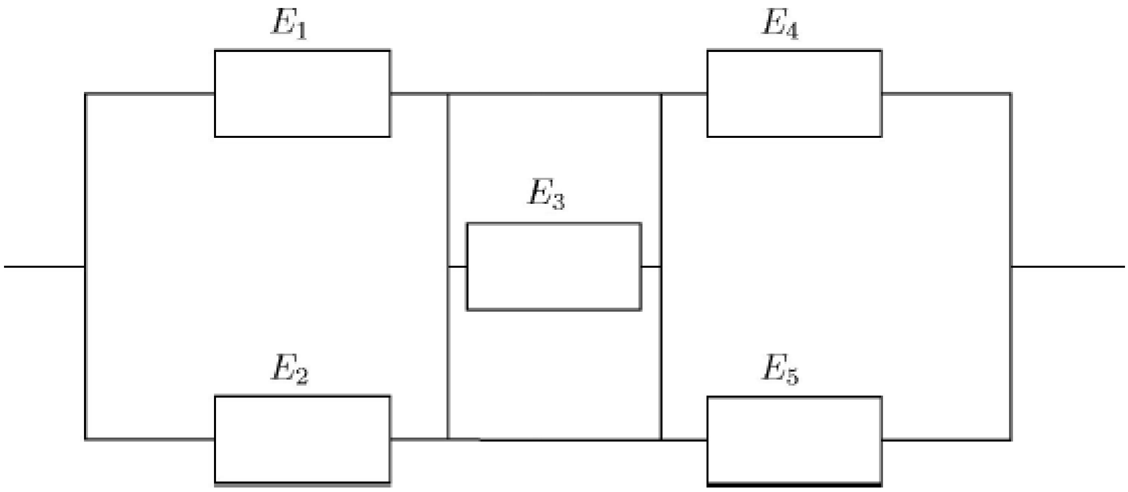
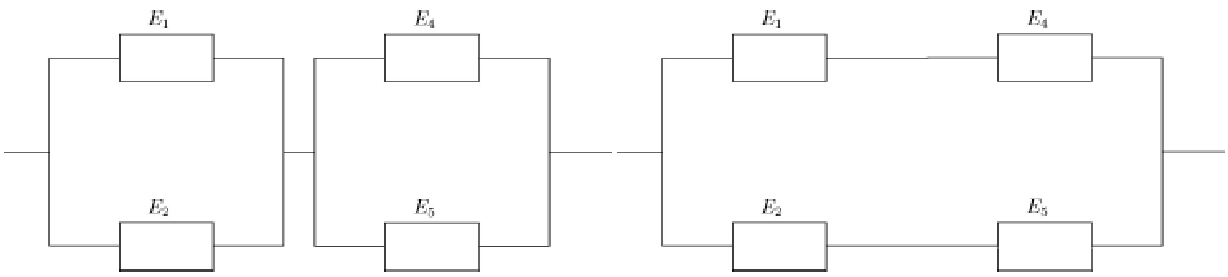


FIG. IV.6 - Système pouvant se ramener à des sous-systèmes parallèles et séries

Le système de la figure IV.6 n'est ni parallèle, ni série, ni mixte. En effet, la nature du système dépend du fonctionnement de l'élément E_3.



(a) Si E_3 fonctionne : système A (b) Si E_3 ne fonctionne pas : système B

FIG. IV.7 – Sous-système de la figure IV.6

- Si l'élément E_3 fonctionne, on est en présence d'un système mixte (système A) : deux éléments parallèles mis en série, avec pour fiabilité :

$$R_A(t) = (1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)))(1 - (1 - R_4(t))(1 - R_5(t))).$$

.

- Si l'élément E_3 ne fonctionne pas, on est en présence d'un autre système mixte (système B) : deux éléments en série mis en parallèle, avec pour fiabilité :

$$R_B(t) = 1 - (1 - R_1(t)R_4(t))(1 - R_2(t)R_5(t)).$$

On a alors : $R_{système}(t) = R_3(t)R_A(t) + [1 - R_3(t)]R_B(t)$.

3 Eléments réparables

3.1 Maintenabilité

Définition 36 Soit S le temps de réparation. L'élément est mis en réparation à $t = 0$. On appelle *maintenabilité* à l'instant t la probabilité que la réparation soit effectuée avant l'instant t, c'est-à-dire :

$$M(t) = \mathrm{IP}(S \leq t) .$$

Remarques 21

1. On a $M(0) = 0$ et $M(+\infty) = 1$. Autrement dit, l'élément n'a subi aucune réparation au moment où il tombe en panne! L'autre égalité nous dit que l'élément sera réparé au bout d'un temps certain!
2. On appelle *immaintenabilité* la quantité $\overline{M} = 1 - M(t)$.
3. De manière analogue au MTTF, on peut définir le temps moyen de réparation (MTTR) par : MTTR = $\mathrm{IE}(S)$.

3.2 Taux de réparation

Définition 37 Le *taux de réparation moyen* sur $[t; t + \Delta t]$ est la probabilité que l'élément soit réparé entre t et $t + \Delta t$ sachant qu'il n'a pas été réparé avant, divisé par Δt, c'est-à-dire :

$$\mu(t;t+\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\mathrm{IP}(t < S \leq t + \Delta t \mid S > t)$$

Définition 38 On définit le *taux de réparation instantané* par :

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\mu(t;t+\Delta t)$$

Proposition 14 On a le résultat suivant :

$$\mu(t) = \frac{M'(t)}{1 - M(t)}$$

3.3 Disponibilité

Définition 39 On appelle *disponibilité* de l'élément la probabilité que l'élément fonctionne à l'instant t. On la note $A(t)$.

Remarque 22 Tous les résultats du paragraphe précédent sur la fiabilité des différents systèmes étudiés s'appliquent pour la disponibilité.
Par exemple, pour un système série, on a :

$$A_S(t) = \prod_{i=1}^{n} A_i(t),$$

et pour un système parallèle, on a :

$$A_P(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - A_i(t)\right),$$

3.3.1 Cas où $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ sont constants

($\lambda(t)$: taux de défaillance et $\mu(t)$: taux de réparation)

Proposition 15 La disponibilité du système vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = -\left(\lambda + \mu\right) A(t) + \mu$$

3.3.2 Cas où $\lambda(t)$ est constant et $\mu(t)$ quelconque

Soit S le temps de réparation, on a :

$$\mathrm{IP}\left(t < S \leq t + \Delta t\right) = g(t)\Delta t + o\left(\Delta t\right)$$

où $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o\left(\Delta t\right)}{\Delta t} = 0$

Proposition 16 La disponibilité du système vérifie l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t) = -\lambda A(t) + \lambda \int_0^t A(t-u) g(u) du + \left(1 - A(0)\right) g(t)$$

Remarque 23 Pour résoudre cette équation, on fait appel aux transformées de Laplace (hors programme).