# Chapitre II

# Variables aléatoires réelles

## 1 Introduction

**Exemple 12** Un joueur jette deux dés et gagne en euros la somme des points obtenus si elle est paire; il perd cette somme si elle est impaire.
L'univers correspondant à cette expérience est $\Omega = \{(a;\, b)$ où $a \in [\![1;6]\!]$; $b \in [\![1;6]\!]\}$ de cardinal 36 sur lequel on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.
Modélisons la situation en construisant une application $X$ de la manière suivante :

$$X : \quad \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(a;b) \mapsto \begin{cases} a+b & \text{si } a+b \text{ est paire} \\ -(a+b) & \text{si } a+b \text{ est impaire} \end{cases}$$

Par exemple, $X(1;\, 3) = 4$ (le joueur gagne 4 euros) et $X(3;\, 4) = (-7)$ (le joueur perd 7 euros).
A chaque événement de $\Omega$, on associe un réel : cette application s'appelle une variable aléatoire. De plus, on peut voir que pour calculer la probabilité que $X = 2$, il faut en fait compter le nombre d'événements élémentaires dont la somme fait 2. Cela revient à se replacer dans l'univers $\Omega$.

**Définition 5** Soit $\Omega$ un univers muni d'une probabilité IP. Une variable aléatoire réelle (V.A.R.) est une application X : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui permet de définir une nouvelle probabilité $Q_X$ sur $\mathbb{R}$, appelée *probabilité image* de IP par $X$ ou *loi de X*.
Cette nouvelle probabilité est entièrement déterminée par l'équation suivante :

$$Q_X\left(]-\infty;t]\right) = \mathrm{IP}\left(X^{-1}\left(]-\infty;t]\right)\right).$$

**Remarque 5** On parle de V.A.R. discrète lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{R}$ et on parle de V.A.R. continue dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble infini non dénombrable de $\mathbb{R}$.

**Propriété 2** Soient $X$ et $Y$ deux V.A.R. définies sur un même univers $\Omega$ et $\lambda$ un réel. On a les propriétés suivantes :

1. $\lambda X$ est une V.A.R.,
2. $X + Y$ est une V.A.R.,
3. $X \,.\, Y$ est une V.A.R.

**Définition 6** Soit $X$ une V.A.R. On appelle *fonction de répartition* de $X$ l'application

$$\begin{array}{rcl} F: \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ t & \mapsto & F(t) = Q_X\left(]-\infty;t[\right) \end{array}$$

Par abus de notation, on posera $Q_X\left(]-\infty;t[\right) = \mathrm{IP}(X < t)$.

**Propriété 3** Toute fonction de répartition $F$ d'une variable aléatoire vérifie :

1. $t \le t' \Rightarrow F(t) \le F(t')$,
2. $F$ est continue à gauche,
3. $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$ ; $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$,
4. $\mathrm{IP}\left(X \in [a,b[\right) = F(b) - F(a)$,
5. $\mathrm{IP}\left(X = x_0\right) = F\left(x_0^+\right) - F\left(x_0^-\right)$.

**Suite de l'exemple 12**
Pour déterminer la loi de *X*, il faut passer par plusieurs étapes.
La première étape est de déterminer l'ensemble des valeurs que prend la V.A.R. *X*.
Ici, *X* prend les valeurs 2, -3, 4, -5, 6,…, -11, 12. En général, cet ensemble sera noté $I_X$.
La seconde étape consiste à déterminer la probabilité $Q_X$.
Ici (cas discret), cela revient à calculer la probabilité que $\{X = k\}$ pour $k \in I_X$.
Posons $D_1$ le résultat du premier dé et $D_2$ le résultat du second. On a :

$$\{X = 2\} = \{D_1 = 1\} \cap \{D_2 = 1\}$$
$$\Rightarrow \mathrm{IP}(X = 2) = \mathrm{IP}(D_1 = 1) \times \mathrm{IP}(D_2 = 1) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

De même, on montre que :

$$\{X = -3\} = \left(\{D_1 = 2\} \cap \{D_2 = 1\}\right) \cup \left(\{D_1 = 1\} \cap \{D_2 = 2\}\right)$$
$$\Rightarrow \mathrm{IP}(X = -3) = \mathrm{IP}(D_1 = 1) \times \mathrm{IP}(D_2 = 2) + \mathrm{IP}(D_1 = 2) \times \mathrm{IP}(D_2 = 1)$$
$$\Rightarrow \mathrm{IP}(X = -3) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

**Définition 7** Deux V.A.R. X et Y sont dites *indépendantes* si :

$$\forall (\mathrm{A} ; \mathrm{B}) \in \mathrm{I}_X \times \mathrm{I}_Y, \qquad \mathrm{IP}\left(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\} \cap \{\mathrm{Y} \in \mathrm{B}\}\right) = \mathrm{IP}(\mathrm{X} \in \mathrm{A}) \times \mathrm{IP}(\mathrm{Y} \in \mathrm{B})$$

# 2 V.A.R. discrètes

## 2.1 Espérance et variance

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux V.A.R. discrètes. Nous avons vu que pour une V.A.R. discrète $X$, l'univers image de $\Omega$ par $X$ est un ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{R}$. Soit $\{x_1, x_2, \dots\}$ les valeurs de cet ensemble.
Pour déterminer la loi de $X$, nous avons vu qu'il faut calculer les probabilités aux points $\{x_1, x_2, \dots\}$, c'est-à-dire les quantités $\mathrm{IP}(X = x_i)$.

**Définition 8** Soit une V.A.R.discrète $X$ à valeurs dans $x_1$ , $x_2$ , …, on appelle *espérance* (ou *moyenne*) de $X$ le réel :

$$\mathrm{IE}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathrm{IP}(X = x_i)$$

**Propriété 4** Soient $X$ et $Y$ deux V.A.R., $a$ et $b$ deux réels. On a les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{IE}(X + Y) = \mathrm{IE}(X) + \mathrm{IE}(Y)$,
2. $\mathrm{IE}(aX + b) = a\mathrm{IE}(X) + b$,
3. $\mathrm{IE}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{IE}(X_i)$.

On peut donc constater que l'espérance est linéaire.

**Exemple 13** Reprenons l'exemple 12, on a :

$$\mathrm{IE}(X) = 2.\frac{1}{36} + (-3)\frac{2}{36} + 4.\frac{3}{36} + (-5)\frac{4}{36} + 6.\frac{5}{36} + (-7).\frac{6}{36} + 8.\frac{5}{36}$$
$$+ (-9).\frac{4}{36} + 10.\frac{3}{36} + +(-11).\frac{2}{36} + 12.\frac{1}{36} = 0$$

L'espérance représente ici le gain moyen du joueur. Dans ce cas, le jeu est d'espérance nulle : on dit qu'il est équilibré. On dit aussi que la V.A.R. $X$ est *centrée*.

**Remarque 6** Pour toute variable aléatoire $X$, la variable aléatoire $X$ - $\mathrm{IE}(X)$ est une variable aléatoire centrée (c'est-à-dire que sa moyenne est nulle).

Pour décrire une distribution (ou loi de probabilité) l'espérance mathématique ne constitue qu'une première étape rudimentaire. Ainsi, si on considère les notes de 3 groupes de TD de 20 élèves dans une école d'ingénieurs :

- tous les élèves du premier groupe ont 10,
- la moitié du second groupe a 20, tandis que l'autre moitié a 0,
- enfin, les notes du troisième groupe sont : 0, 1, 2,…, 9, 11, 12,…, 20.

Dans les 3 groupes, la moyenne est égale à 10, pourtant les 3 situations décrites sont bien différentes. Pour rendre compte de ce phénomène, on définit un autre paramètre qu'on appelle la variance.

**Définition 9** Soit une V.A.R.discrète $X$ à valeurs dans $x_1$ , $x_2$ , …

- On appelle *variance* de $X$ le réel :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{IE}\left(\left[X - \mathrm{IE}(X)\right]^2\right) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left[x_i - \mathrm{IE}(X)\right]^2 \mathrm{IP}\left(X = x_i\right)$$

  Cette dernière permet d'apprécier la dispersion des résultats en mesurant la moyenne des carrés des écarts.

- Pour des raisons d'homogénéité (quand $X$ s'exprime dans une certaine unité), on définit l'*écart-type*. Celui-ci est la racine carrée de la variance et est généralement noté : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

**Propriété 5** Soit $X$ une V.A.R., on a les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$,
2. Formule de Koënig-Huyghens :
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{IE}(X^2) - [\ \mathrm{IE}(X)\ ]^2,$$
3. soient $a$ et $b$ deux réels, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$,
4. soit $Y$ une autre V.A.R. discrète. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors :
$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

**Remarques 7**

- Dans les carnets de santé des enfants, les courbes de taille et de poids sont représentées par une ligne continue encadrée de deux lignes en pointillé. C'est ce qu'on appelle intervalle de confiance. Ces intervalles sont calculés en fonction de la moyenne et de l'écart-type.
- Pour toute variable aléatoire $X$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{IE}(X)}{\sigma(X)}$ a pour espérance 0 et pour écart-type 1. On dit alors que la V.A.R. $X$ est centrée réduite.

## 2.2 Lois discrètes usuelles

### 2.2.1 Loi uniforme discrète

**Exemple 14** On jette un dé à $n$ faces (si, si, ça existe …). $X$ représente les points obtenus.

**Définition 10** On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une *loi uniforme* sur $\{1,\ldots, n\}$ si elle prend comme valeurs les entiers 1, 2,…, $n$ avec la probabilité $\frac{1}{n}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1;n]\!]\ ,\ \mathrm{IP}\left[X = k\right] = \frac{1}{n}$$

**Propriété 6** Pour une V.A.R. $X$ suivant une loi uniforme sur $\{1,\ldots, n\}$, on a :

$$\mathrm{IE}(X) = \frac{n+1}{2},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

## 2.2.2 Loi de Bernoulli

**Exemple 15** Une production d'emballages de produits pharmaceutiques teste à la fin de la chaîne la qualité de l'emballage. Après ce test, on choisit de garder ou non l'emballage (soit l'emballage est bon, soit il est défectueux). $X$ représente le résultat du test sur un emballage.

**Définition 11**
On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une *loi de Bernoulli* si elle ne prend que deux valeurs 1 (**succès** : bon emballage) ou 0 (**échec** : emballage défectueux) avec les probabilités respectives $p$ et $1 - p = q$. On a donc :

$$\mathrm{IP}[X = 1] = p = 1 - \mathrm{IP}[X = 0] .$$

**Remarque 8** Toute expérience qui peut donner comme résultat uniquement deux valeurs: pile ou face, la naissance d'un enfant (fille ou garçon), le contrôle de qualité d'une production (pièce bonne ou défectueuse) peut être modélisée par une V.A.R. de Bernoulli.

**Propriété 7** Pour une V.A.R. $X$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$, on a :

$$\mathrm{IE}(X) = p,$$
$$\mathrm{Var}(X) = pq$$

## 2.2.3 Loi binomiale $B(n, p)$

**Exemple 16** Supposons que l'on répète $n$ fois, de manière indépendante, une expérience de Bernoulli de paramètre p. On s'intéresse à la variable aléatoire $X$ représentant le nombre de succès au cours des n épreuves. $X$ prend les valeurs 0, 1, 2,…, $n$.
Calculons les probabilités que $\{X = k\}$ pour $k = 0, 1, 2,\ldots, n$.
En fait, $X = k$ correspond à un $n$-uplet comportant $k$ succès et $n - k$ échecs.
De plus, nous savons qu'il y a $C_n^k$ façons de constituer un tel $n$-uplet. Comme les expériences de Bernoulli sont indépendantes, la probabilité d'obtenir un tel $n$-uplet est de $p^k q^{n-k}$.
Nous obtenons donc $\mathrm{IP}(X = k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$. Vérifions que c'est bien une probabilité :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{IP}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

**Définition 12** On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètre $(n, p)$ si on a :

$$\forall k \in [\![0;n]\!] \text{ , } \mathrm{IP}\left[X = k\right] = C_n^k p^k q^{n-k}$$

On la note $B(n, p)$.

**Remarque 9** On a vu qu'une V.A.R. binomiale peut être considérée comme le nombre de succès dans $n$ expériences de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire de même loi; et donc, ici, de même paramètre $p$). En associant à la $i^{ème}$ expérience une V.A.R. de Bernoulli $Y_i$, on voit que $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ . C'est-à-dire qu'une V.A.R. binomiale $B(n, p)$ est la somme de $n$ V.A.R. de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

**Propriété 8** Pour une V.A.R. $X$ suivant une loi binomiale $B(n, p)$, on a :

$$\mathrm{IE}\left(X\right) = np,$$
$$\mathrm{Var}\left(X\right) = npq$$

### 2.2.4 Loi de Poisson

**Exemple 17** Cette loi est souvent utilisée pour modéliser :

- le nombre de pièces défectueuses dans un lot donné,
- le nombre d'appels téléphoniques à un standard,
- les apparitions de pannes dans un ensemble de machines,
- le nombre de clients attendant à un guichet.

**Définition 13** On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ si on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ , } \mathrm{IP}\left[X = k\right] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On la note $P(\lambda)$.

**Propriété 9** Pour une V.A.R. $X$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, on a :

$$\mathrm{IE}\left(X\right) = \lambda,$$
$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \lambda$$

### 2.2.5 Loi géométrique

**Exemple 18** On répète autant de fois que nécessaire de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$ jusqu'à obtenir un succès. $X$ est la variable aléatoire «rang du premier succès». $X$ prend toutes les valeurs entières naturelles non nulles.
Calculons les probabilités que $\{X = k\}$ pour $k = 1, 2, \ldots$
Si le succès arrive au rang $k$, cela veut dire que nous devons avoir $k$ - 1 échecs, puis le succès.
La probabilité d'avoir $k - 1$ échecs est $q^{k-1}$ et la probabilité d'avoir le succès est $p$.
Nous obtenons donc $\mathrm{IP}(X = k) = q^{k-1}p$. Vérifions que c'est bien une probabilité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{IP}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{n-1} p = p\frac{1}{1-q} = 1$$

**Définition 14** On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi géométrique de paramètre ($p$) si on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ ,\ \mathrm{IP}[X=k] = q^{k-1} p$$

**Propriété 10** Pour une V.A.R. $X$ suivant une loi géométrique $p$, on a :

$$\mathrm{IE}(X) = \frac{1}{p},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

#### 2.2.6 Loi de Pascal

**Exemple 19** On répète autant de fois que nécessaire de manière indépendante une épreuve géométrique jusqu'à obtenir $r$ succès. $X$ représente le nombre de tirages nécessaires. $X$ peut prendre les valeurs entières de $r$ à $+\infty$ (il faut tester au moins $r$ emballages pour que $r$ emballages soient bons, mais on peut aussi ne jamais avoir de bon emballage! L'entreprise aurait alors de sérieux problèmes de machines...)

**Définition 15** On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Pascal de paramètre ($r$, $p$) si on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [r;+\infty[\ ,\ \mathrm{IP}[X=k] = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$$

On parle aussi de loi binomiale négative et on la note $BN(r, p)$.

**Remarques 10**

1. Une V.A.R. de Pascal est la somme de $r$ V.A.R. géométriques identiques et indépendantes.
2. Si $r = 1$, on reconnaît la loi géométrique de paramètre $p$.

**Propriété 11** Pour une V.A.R. $X$ suivant une loi de Pascal ($r$, $p$), on a :

$$\mathrm{IE}(X) = \frac{r}{p},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$$

Nous venons de voir les principales lois discrètes. Pour la suite, il est important de savoir reconnaître rapidement ces lois dans un problème concret.

# 3 V.A.R. continues

## 3.1 Espérance et variance

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux V.A.R. continues. Nous avons vu que pour une V.A.R. continue $X$, l'univers image de $\Omega$ par $X$ est un ensemble infini non dénombrable de $\mathbb{R}$.

Nous avons déjà vu la définition d'une fonction de répartition au début de ce chapitre :

$$F(\mathrm{t}) = \mathrm{IP}(X < t) = Q_X(\,]-\infty\,;\,t\,[\,)\,.$$

**Remarque 11** Une V.A.R. est continue si et seulement si sa fonction de répartition est continue, c'est à dire s'il n'existe aucun $x\in\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{IP}(X = x) \neq 0$.

**Définition 16**

- On dit que $X$ (ou plus exactement la loi de $X$) est *absolument continue* s'il existe $f_X \geq 0$ telle que pour tout événement $A$, on ait :

$$\mathrm{IP}[X\in A] = \int_A f_X(x)dx$$

- En particulier, $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$. Dans ce cas, la fonction $f_x$ est la *densité* de probabilité de $X$.

- On appelle *espérance* (ou *moyenne*) de $X$ le réel :

$$\mathrm{IE}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x)dx$$

- On appelle variance de $X$ le réel :

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} \left(x - \mathrm{IE}(x)\right)^2 f_x(x)dx$$

**Remarque 12** Soient $X$ et $Y$ deux V.A.R. continues, $a$ et $b$ deux réels. On a encore les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{IE}(X + Y) = \mathrm{IE}(X) + \mathrm{IE}(Y)$
2. $\mathrm{IE}(aX + b) = a\mathrm{IE}(X) + b$
3. $\mathrm{IE}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{IE}(X_i)$
4. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{IE}(X^2) - [\ \mathrm{IE}(X)\ ]^2$
5. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$,
6. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors : $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

**Proposition 4 (changement de variable dans le cas continu)**

Si la V.A.R. $X$ admet une densité $f_X$ *et si* $g$ est une application bijective, alors la V.A.R. $Y = g(X)$ a pour densité :

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right).\left|\left(g^{-1}\right)'(y)\right|$$

Il existe un lien direct entre la densité et la fonction de répartition (lorsque l'une des deux existe) :

**Proposition 5**

1. Soit $f_X$ la densité d'une V.A.R. $X$. La fonction de répartition de $X$ est déduite par la formule suivante :
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$
2. Soit $F_X$ la fonction de répartition de $X$. La densité de $X$ est déduite par la formule suivante :
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Nous avons également les caractérisations suivantes :

**Proposition 6** Soit $f$ une fonction. Si $f$ vérifie les hypothèses suivantes :

1. $f \geq 0$,
2. $f$ est continue sauf en un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3. $f$ admet aux points $x_i$ une limite à gauche (finie ou égale à $+\infty$) et une limite à droite (finie ou égal à $+\infty$),
4. l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1,

alors il existe une V.A.R. $X$ telle que la densité de $X$ est la fonction $f$.

**Proposition 7** Soit $F$ une fonction. Si $F$ vérifie les hypothèses suivantes :

1. $F$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$
3. $F$ est continue et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$
4. $F'$ admet aux points $x_i$ une limite à gauche (finie ou égale à $+\infty$) et une limite à droite (finie ou égal à $+\infty$),

alors il existe une V.A.R. $X$ telle que la fonction de répartition de $X$ est la fonction $F$

Pour déterminer la loi d'une V.A.R. continue, il faut donner l'ensemble de définition de cette V.A.R., puis soit donner sa densité, soit sa fonction de répartition. Nous allons donc donner pour chaque loi l'ensemble de définition ainsi que la densité associée.

## 3.2 Lois continues usuelles

### 3.2.1 Loi uniforme

**Exemple 20** Pour un observateur non synchronisé, la phase d'un signal sinusoïdal issu d'un générateur peut être modélisée par une variable aléatoire réelle continue uniformément répartie sur un intervalle de longueur $2\pi$.

**Définition 17**
On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une *loi uniforme* sur $[a; b]$ si sa densité est égale à :

$$\forall x \in [a;b],\quad f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$
$$\forall x \notin [a;b],\quad f_X(x) = 0$$

**Remarque 13** On emploie souvent la fonction "*indicatrice*", notée $\mathbb{1}$, pour donner directement avec la densité l'ensemble de définition de la V.A.R. Ici, on obtient :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a;\, b]}(x)\ .$$

Avec cette densité on peut calculer la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[a; b]$.
On a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } b \le x \end{cases}$$

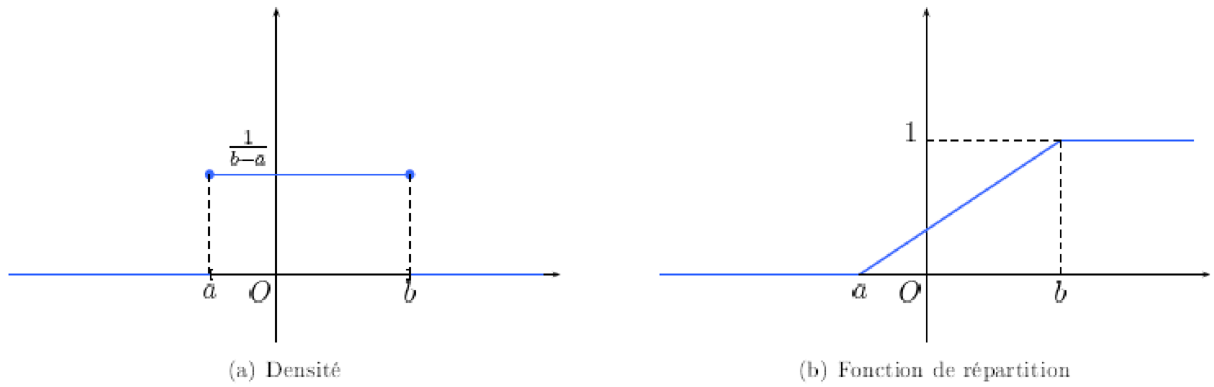


FIG. II.1 - Loi uniforme sur [*a; b*].

**Propriété 12** Pour une V.A.R. *X* suivant une loi uniforme sur [*a; b*], on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### 3.2.2 Loi exponentielle

**Exemple 21** Avec cette loi, on modélise, en général, la durée de vie d'un matériel technique ou le rayonnement d'une particule radioactive.

**Définition 18** On dit qu'une variable aléatoire *X* suit une *loi exponentielle* de paramètre $\lambda$ si sa densité est égale à :

$$\forall x \geq 0, \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$\forall x < 0, \quad f_X(x) = 0$$

i.e. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ .

**Remarque 14** Avec cette densité on peut calculer la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
On a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

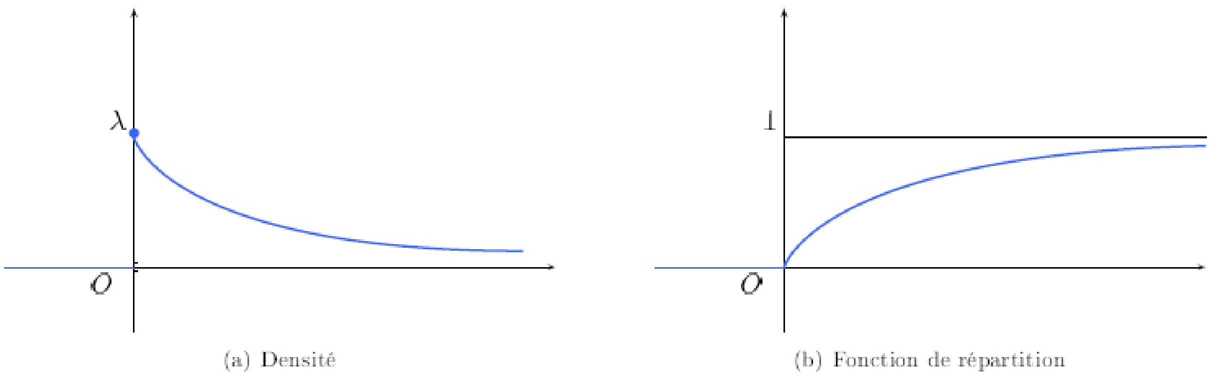


FIG. II.2 - Loi exponentielle de paramètre λ.

**Propriété 13** Pour une V.A.R. *X* suivant une loi exponentielle de paramètre λ, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

### 3.2.3 Loi normale ou loi Gaussienne

**Exemple 22** C'est une des lois les plus utilisées en statistiques. Elle possède de très bonnes propriétés. Notamment, le théorème de la limite centrale que nous verrons au prochain chapitre, nous dit que pour une suite de V.A.R. indépendantes et identiquement distribuées où la moyenne et la variance sont finies, la somme centrée réduite tend vers une loi normale centrée réduite. On comprend alors l'importance que prend la loi normale, puisqu'elle va intervenir pratiquement partout …

**Définition 19** On dit qu'une variable aléatoire *X* suit une *loi normale* de paramètre $(\mu, \sigma^2)$ si sa densité est égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

On la note $N(\mu, \sigma^2)$.

**Remarque 15** Pour la loi normale, il est impossible de donner une forme explicite de la fonction de répartition. En effet, il faudrait calculer l'intégrale suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}} dt$$

ce qui revient à calculer une intégrale de la forme $\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$. Or on ne connaît pas de primitive de cette fonction.

Lorsqu'on ne peut pas calculer de manière explicite la fonction de répartition, on la calcule de manière numérique. On construit alors ce qu'on appelle des tables de loi. Nous verrons en TD comment les utiliser.

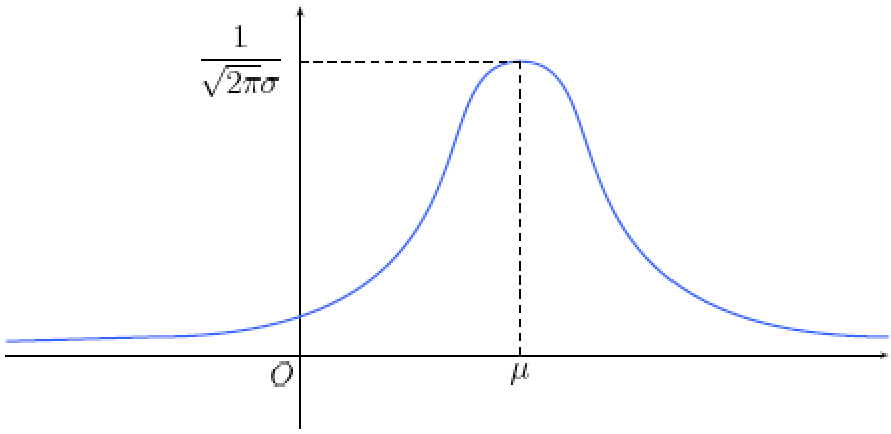


FIG. II.3 - Densité de la loi normale de paramètre $(\mu, \sigma^2)$.

**Propriété 14** Pour une V.A.R. $X$ suivant une loi normale de paramètres $(\mu, \sigma^2)$, on a :

$$\mathrm{IE}(X) = \mu$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

### 3.2.4 Loi de Cauchy

**Exemple 23** Cette loi sert souvent de contre-exemple car elle n'a aucun moment, c'est-à-dire que l'espérance de toutes puissances de $X$ est infinie. A fortiori, il n'existe pas de moyenne (moment d'ordre 1) et pas de variance (moment centré d'ordre 2).

**Définition 20** On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une *loi de Cauchy* si sa densité est égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Nous venons de voir les principales lois continues. Comme pour les lois discrètes, il est important de savoir reconnaître rapidement ces lois dans un problème concret. Les deux tableaux en annexe récapitulent les principales lois discrètes et continues que vous pourriez rencontrer dans la pratique.