Initiation aux Probabilités
Application en Fiabilité

Chapitre I

Calcul d'une probabilité

1 Introduction

L'histoire des probabilités commence avec Pascal, Fermat, Leibnitz : «J'ai dit plus d'une fois qu'il faudrait une nouvelle espèce de logique, qui traiterait des degrés de probabilité» (dans «Les nouveaux essais de l'entendement humain», 1704). Les travaux sont poursuivis par
De Moivre et Bernoulli : «La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout» (dans "Ars Conjectandi", 1713). En 1812, dans son «Essai philosophique sur les probabilités», Laplace pose les premières pierres de la théorie: «Premier principe : la probabilité est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles. Deuxième principe : mais cela suppose les divers cas également possibles. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards. Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable.»

Supposons :

- qu'on lance un dé (non truqué),
- qu'on extraie une boule d'une urne dans laquelle ces boules sont indiscernables,
- qu'on examine la marque d'une voiture au hasard à un péage,
- qu'on lance une roue de loterie et que l'on guette le numéro sortant,
- qu'on attende un enfant sans savoir si c'est un garçon ou une fille …

Toutes ces expériences sont dites aléatoires (du latin alea : le dé, puis le jeu de dés -rappelez-vous la célèbre formule «alea jacta est»-) car leur résultat ne peut être prévu : il dépend du hasard (mot venant de l'arabe et signifiant : jeu de dés).

2 Comparaison ensemble - probabilité

Le vocabulaire des probabilités diffère de celui des ensembles. Le tableau I.1, page suivante, nous montre les différences de vocabulaire.

Théorie des ensembles	Théorie des probabilités
Ω	
ensemble des résultats possibles	univers
$A \subset \Omega$	
sous-ensemble, partie	événement
$\operatorname{Card} A = 1$	
singleton	événement élémentaire
$A = \emptyset$	
ensemble vide	événement impossible
$A = \Omega$	
	événement certain
$A \cap B$	
A inter B	A et B
$A \cup B$	
A union B	A ou B
$A \subset B$	
A inclus dans B	A implique B
$A \cap B = \emptyset$	
A et B disjoints	A et B incompatibles
$\overline{A} = A^c$	
complémentaire de A	contraire de A

TAB. I.1 - Ensemble vs Probabilités

Exemple 1 Soit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3\}$. On a :

- $A \bigcap B = \{2\}$: c'est un événement élémentaire,
- $A \bigcup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$,
- $A^c = \{1; 3; 5\}$.

3 Probabilités

Le calcul des probabilités nous amène à travailler parfois sur une suite dénombrable d'événements. C'est la raison pour laquelle la définition d'une probabilité fait intervenir une suite dénombrable.

Définition 1 Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle *probabilité* sur Ω toute application $\mathrm{IP} : \Omega \to [0;1]$ telle que :

1. $\mathrm{IP}(\Omega) = 1$,
2. Pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles de Ω, on a :

$$\mathrm{IP}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathrm{IP}(A_n)$$

Proposition 1 On en déduit que si A et B sont incompatibles alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Remarque 1 La proposition reste vraie pour une suite finie d'événements incompatibles.

Conséquence 1 On en déduit que :

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
2. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$,
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarque 2 On appelle *système complet d'événements* une suite $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ d'événements telle que :

- $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Exemple 2 Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers de dimension fini. Posons $p_i = \mathbb{P}(\omega_i)$. On a alors :

- $\forall i \in [\![1;n]\!],\ p_i \geq 0$,
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

4 Probabilité uniforme ou équiprobabilité dans un univers fini

Exemple 3 On jette un dé équilibré : chacune des 6 faces a la même probabilité d'apparaître, soit $\frac{1}{6}$.

Définition 2 Soit Ω un univers fini (cf. exemple 2). On note $p_i = \mathbb{P}(\omega_i)$. On dit qu'il y a *équiprobabilité* si :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ \forall j \in [\![1;n]\!],\ p_i = p_j\ .$$

On obtient alors que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{p}_i = \frac{1}{n}$. On dit alors qu'on est en présence d'une *probabilité uniforme* sur Ω.

Propriété 1 Soient Ω un univers fini et une probabilité uniforme sur Ω. Soit A un événement de Ω. La probabilité de A vaut :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

ATTENTION : cette formule n'est valable que dans l'hypothèse d'équiprobabilité qu'il convient de vérifier soigneusement. De plus, le calcul dans le cas d'équiprobabilité nécessite souvent d'avoir recours aux dénombrements.

Exemple 4 On jette deux dés et on cherche la probabilité de l'événement A « la somme des points obtenus vaut 6 ». On peut être tenté de dire: il y a 11 sommes possibles, qui sont 2, 3, …, 12 donc la probabilité que la somme vaille 6 est 1/11. ET NON!! car ces événements ne sont pas équiprobables.

L'univers correspondant à l'expérience est $\Omega = \{(a; b)$ où $a \in [\![1;6]\!], b \in [\![1;6]\!]\}$. On peut donc voir que card(Ω) = $6\times6=36$.

Chacun des couples (a; b) ayant la même chance d'apparaître, nous avons affaire à l'équiprobabilité.

L'événement A est la réunion des événements élémentaires : (1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1).

On a donc $\mathrm{IP}(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{5}{36}$.

Remarque 3 On fait souvent des calculs de probabilités en considérant une population dans laquelle on prélève un individu «au hasard» et on examine s'il possède ou non telle caractéristique. Dans ce cas, la probabilité considérée est la probabilité uniforme et la formule ci-dessus s'applique.

5 Conditionnement et indépendance

5.1 Probabilité conditionnelle

Exemple 5 Un paquet de 8 cartes est composé de 4 as (As ♠; As ♥; As ♦ et As ♣) et de 4 rois (Roi ♠; Roi ♥; Roi ♦ et Roi ♣). On tire deux cartes au hasard (sans remise). Calculons la probabilité que ces deux cartes soient des as. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega = \{(a; b)$ où a et $b \in$ {As ♠; As ♥; As ♦; As ♣; Roi ♠; Roi ♥; Roi ♦; Roi ♣}}.

On peut donc lister l'ensemble des duos possibles :

As♠-As♡	As♡-As♢	As♢-As♣	As♣-Roi♠	Roi♠-Roi♡	Roi♡-Roi♢	Roi♢-Roi♣
As♠-As♢	As♡-As♣	As♢-Roi♠	As♣-Roi♡	Roi♠-Roi♢	Roi♡-Roi♣	
As♠-As♣	As♡-Roi♠	As♢-Roi♡	As♣-Roi♢	Roi♠-Roi♣		
As♠-Roi♠	As♡-Roi♡	As♢-Roi♢	As♣-Roi♣			
As♠-Roi♡	As♡-Roi♢	As♢-Roi♣				
As♠-Roi♢	As♡-Roi♣					
As♠-Roi♣						

Les duos d'as apparaissent sur fond bleu. Comme il y a équiprobabilité des couples, nous avons:

$$\mathrm{IP}(2 \text{ as}) = \frac{\text{nombre de paires d'as}}{\text{nombre total de paires}} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

Supposons maintenant qu'une des deux cartes soit un as. L'ensemble des possibilités a donc changé. Le tableau suivant liste les nouvelles possibilités :

As♠-As♡ As♠-As♢ As♠-As♣ As♠-Roi♠ As♠-Roi♡ As♠-Roi♢ As♠-Roi♣	As♡-As♢ As♡-As♣ As♡-Roi♠ As♡-Roi♡ As♡-Roi♢ As♡-Roi♣	As♢-As♣ As♢-Roi♠ As♢-Roi♡ As♢-Roi♢ As♢-Roi♣	As♣-Roi♠ As♣-Roi♡ As♣-Roi♢ As♣-Roi♣			

Ici aussi, les duos d'as apparaissent sur fond bleu. Nous avons :

$$\mathrm{IP}(2 \text{ as sachant qu'une des deux est un as}) = \frac{\text{nombre de paires d'as}}{\text{nombre total de paires possibles}} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

En fait, lorsqu'on dispose d'une information sur la nature du résultat, cette information modifie le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

Les probabilités conditionnelles apparaissent en particulier lorsqu'on est en présence d'expériences successives et dépendantes. Ici, le tirage de la seconde carte dépend de manière évidente du tirage de la première (on ne peut pas tirer l'as de pique au second tirage si on l'a tiré au premier …) : on est donc en présence d'expériences successives dépendantes.

Définition 3 Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire muni d'une probabilité IP et B un événement de Ω de probabilité non nulle. On appelle *probabilité conditionnelle* sachant que B est réalisé, la probabilité p_B définie par :

$$p_B : \Omega \to [0;1]$$
$$A \mapsto p_B(A) = \frac{\mathrm{IP}(A \cap B)}{\mathrm{IP}(B)}$$

Proposition 2 La quantité p_B est une probabilité sur le nouvel univers B.

Notation : on note souvent cette probabilité de la façon suivante : p_B (A) = IP(A / B) et on lit «probabilité de A sachant B».

5.2 Indépendance

Exemple 6 On jette deux fois une pièce de monnaie équilibrée (c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir pile est de $\frac{1}{2}$) et on regarde les deux résultats. L'univers associé à cette expérience aléatoire est Ω = {PP, PF, FP, FF} de cardinal 4. Soient les événements suivants :
A "le premier lancer donne pile", B "le deuxième lancer donne pile", C "deux jets consécutifs donnent pile". On peut montrer que :

$$A=(PP)\cup(PF)\ ;\ B=(FP)\cup(PP)\ ;\ C=(PP)$$

et donc par équiprobabilité, on a :

$$\mathrm{IP}(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{IP}(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{IP}(C)=\frac{1}{4}$$

On sait que les lancers sont indépendants, c'est-à-dire que le résultat du second lancer ne dépend pas du résultat du premier. De plus, ici $C = A \cap B$, on peut alors constater d'après ce qui précède que $\mathrm{IP}(C) = \mathrm{IP}(A).\mathrm{IP}(B)$.

Définition 4 Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité IP. On dit que A et B sont *indépendants* si on a :

$$\mathrm{IP}(A \cap B) = \mathrm{IP}(A).\mathrm{IP}(B)\ .$$

Remarque 4 Lorsque A et B sont indépendants et que leurs probabilités sont non nulles, on a l'égalité suivante $\mathrm{IP}(A\ /\ B) = \dfrac{\mathrm{IP}(A\cap B)}{\mathrm{IP}(B)} = \mathrm{IP}(A)$. Cela veut dire que la réalisation de B ne modifie pas la probabilité de A (intuitivement cela correspond bien à ce qu'on entend par "indépendance"). On peut voir aussi que $\mathrm{IP}(B\ /\ A) = \mathrm{IP}(B)$ et donc que la réalisation de A ne modifie pas la probabilité de B.

Proposition 3 Si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants (donc aussi B et A^c par symétrie) et A^c et B^c sont indépendants.

5.3 Conséquence : diverses formules

Généralisation de la formule du conditionnement : soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements tels que $\mathrm{IP}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, on a le résultat suivant :

$$\mathrm{IP}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)=\mathrm{IP}(A_1)\,\mathrm{IP}(A_2/A_1)\,\mathrm{IP}(A_3/A_1\cap A_2)\ldots\mathrm{IP}\left(A_n/\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

Soit $(A_k)_{k=1,\ldots,n}$ un système complet d'événements. On suppose de plus que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ $\mathrm{IP}(A_k) > 0$. On a alors les deux résultats suivants :

(i) Propriété des probabilités totales : soit B un événement de Ω, on a

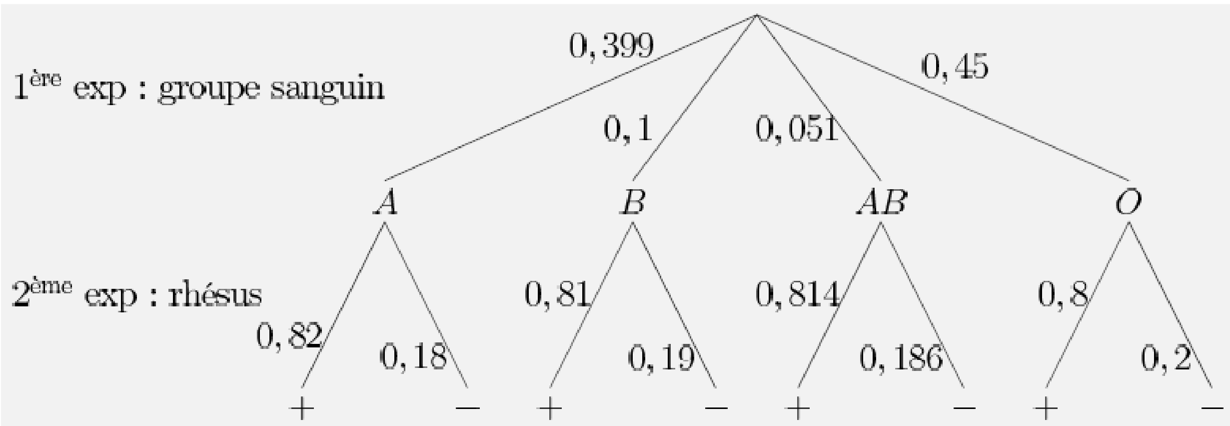
$$\mathrm{IP}(B)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{IP}(B/A_k)\,\mathrm{IP}(A_k)$$

(ii) Formule de Bayes : on suppose IP(B) $\neq$ 0. On a alors :

$$\forall \mathrm{k}\in [\![1;n]\!] \quad \mathrm{IP}(A_k/B)=\frac{\mathrm{IP}(B/A_k)\,\mathrm{IP}(A_k)}{\sum_{j=1}^{n}\mathrm{IP}(B/A_j)\,\mathrm{IP}(A_j)}$$

5.4 Technique pour utiliser un arbre de probabilité

Exemple 7 Pour illustrer la théorie, nous allons reprendre un exemple que nous allons voir en TD (sur les groupes sanguins). Nous supposerons que l'arbre est déjà construit (nous le ferons en TD). Le voici :



Pour bien comprendre l'utilisation des arbres, deux formules sont importantes: la propriété des probabilités totales et la généralisation de la formule du conditionnement.
En effet, pour calculer la probabilité de la deuxième expérience, il faut :

1) rajouter tous les résultats de la première expérience par la première formule.

Exemple 8

$$\begin{aligned}\mathrm{IP}(\text{rhésus }+)=\;&\mathrm{IP}(\text{rhésus }+\cap\text{ groupe }A)\\&+\mathrm{IP}(\text{rhésus }+\cap\text{ groupe }B)\\&+\mathrm{IP}(\text{rhésus }+\cap\text{ groupe }AB)\\&+\mathrm{IP}(\text{rhésus }+\cap\text{ groupe }O)\end{aligned}$$

2) puis conditionner par la deuxième formule, car ce qui est donné par les hypothèses, ce sont les probabilités de la première expérience et les probabilités de la deuxième expérience sachant la première, …

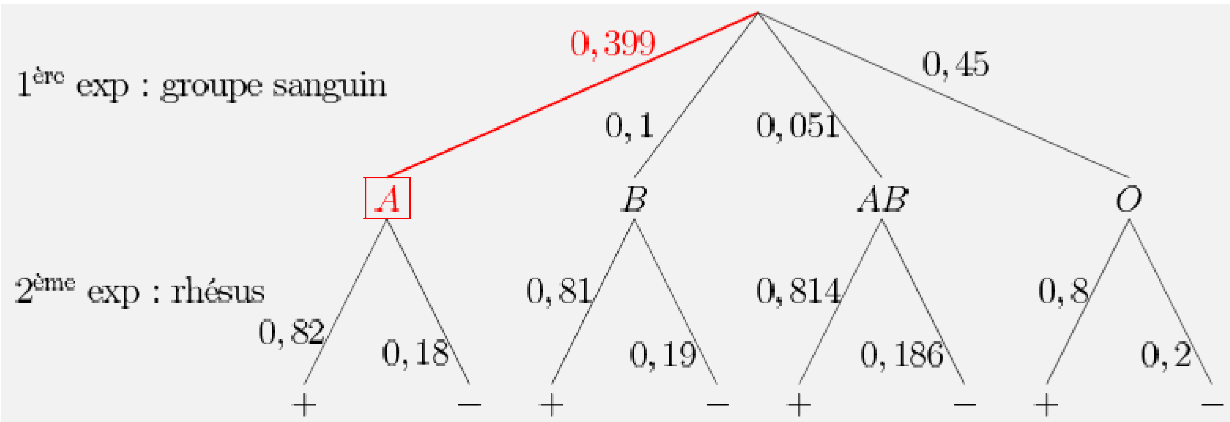
Exemple 9

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{rhésus } +) = {} & \mathbb{P}(\text{groupe } A).\mathbb{P}(\text{rhésus } + / \text{ groupe } A) \\ & + \mathbb{P}(\text{groupe } B).\mathbb{P}(\text{rhésus } + / \text{ groupe } B) \\ & + \mathbb{P}(\text{groupe } AB).\mathbb{P}(\text{rhésus } + / \text{ groupe } AB) \\ & + \mathbb{P}(\text{groupe } O).\mathbb{P}(\text{rhésus } + / \text{ groupe } O)\end{aligned}$$

Et ces 8 probabilités sont connues.

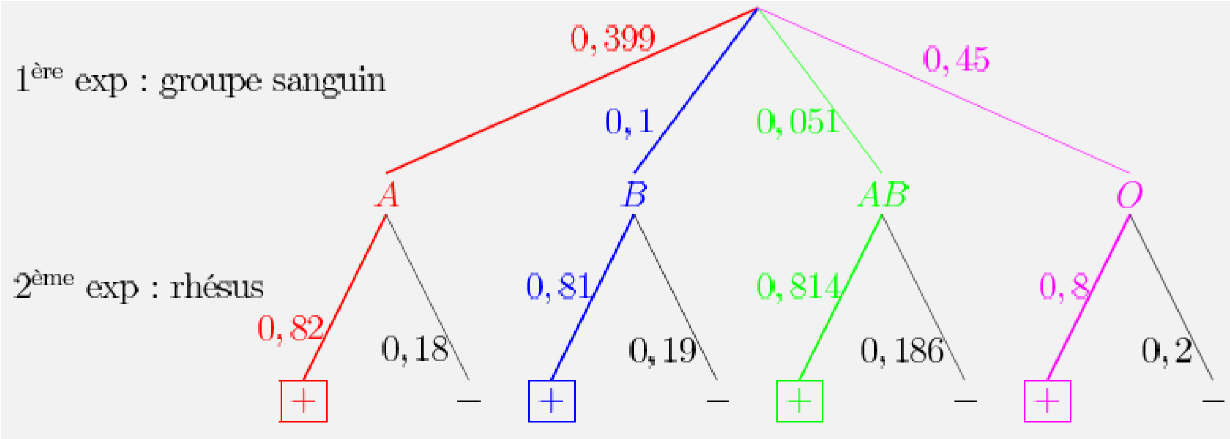
Maintenant que vous connaissez la théorie, voyons comment on peut accélérer le calcul d'un événement en utilisant l'arbre.
Lorsque l'on veut calculer une probabilité appartenant à la $n^{ième}$ expérience, il faut trouver toutes les branches où celui-ci se trouve et remonter jusqu'à la racine. S'il y a plusieurs chemins, on les ajoute (première formule) et pour chaque chemin, on multiplie les valeurs trouvées sur son passage (deuxième formule).

Exemple 10 Calculons la probabilité qu'une personne soit de groupe A. La démarche est la suivante : "groupe A" vient de la première expérience. Il est seul et on remonte jusqu'à la racine. Sur le graphe, cela donne :



On a donc : $\mathbb{P}(\text{groupe } A) = 0{,}399$.

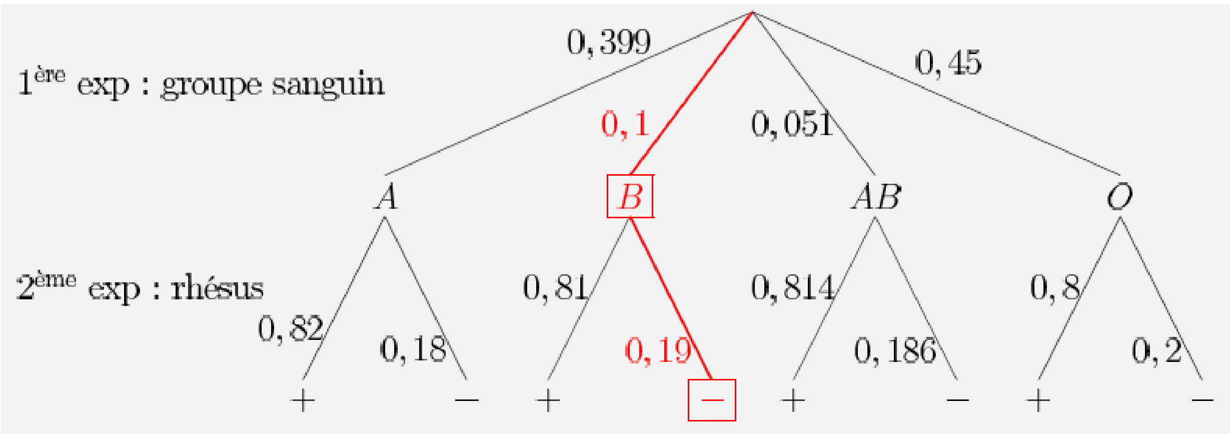
Exemple 11 Calculons la probabilité qu'une personne soit rhésus positif. La démarche est la même que pour l'exemple précédent : "rhésus +" vient de la deuxième expérience. Il y en a 4 (cela correspond aux 4 couleurs du graphe). Sur le graphe, cela donne :



On a donc : IP(rhésus +) = 0,82 . 0,399 + 0,81 . 0,1 + 0,814 . 0,051 + 0,8 . 0,45.

Pour refaire le lien avec la théorie, il faut voir que 0,82 correspond à la probabilité qu'on soit rhésus + sachant qu'on est du groupe *A*; 0,399 est la probabilité qu'on soit du groupe *A*.
Et donc 0,82 . 0,399 correspond à la probabilité qu'on soit du groupe *A* **et** qu'on soit rhésus +.

Pour terminer l'exemple à deux expériences, calculons IP(rhésus - $\bigcap$ groupe *B*). Il n'y a qu'un seul chemin. Sur le graphe, cela donne :



On a donc : IP(rhésus - $\bigcap$ groupe *B*) = 0,19 . 0,1.

Pour trois expériences successives, cela se passe exactement de la même manière, mais les calculs sont encore plus longs!!