

A1 Conductivité d'un métal

A11 Conductivité statique

a) En appliquant une tension entre deux points du conducteur.

b) PFD : $\vec{f} + \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ soit $-\frac{m}{\tau} \vec{v} + q\vec{E} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

c) La résolution donne, compte tenu des conditions initiales :

$$\vec{v} = \frac{q\tau\vec{E}}{m} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) ; \text{ vitesse limite en régime permanent : } \vec{v}_o = \frac{q\tau\vec{E}}{m}$$

τ est le temps de relaxation, caractéristique d'atteinte de la vitesse limite.

Lorsque $t = \tau$, $v = v_o (1 - \frac{1}{e}) = 0,63v_o$

d) $\vec{j}_o = \gamma\vec{E} = \rho\vec{v}_o = nq\vec{v}_o$ en $A.m^{-2}$

e) $\vec{j}_o = \gamma\vec{E} = \rho\vec{v}_o = nq\vec{v}_o = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$ d'où $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m} = 3,7.10^7 S.m^{-1}$

A12 Conductivité dynamique

a) L'équation différentielle vérifiée par la vitesse s'écrit, en formalisme complexe,

$$\frac{d\underline{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\underline{v} = \frac{q}{m}\underline{E} = \frac{q}{m}\frac{\underline{j}}{\underline{\Gamma}} = \underline{v}(i\omega + \frac{1}{\tau}) = \frac{\underline{j}}{nq}(i\omega + \frac{1}{\tau})$$

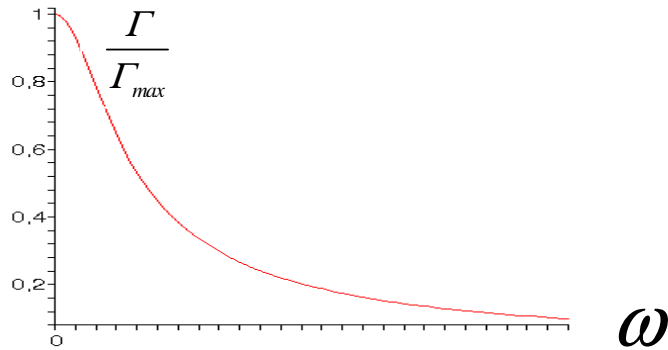
On en déduit $\underline{\Gamma} = \frac{nq^2\tau}{m(1+i\omega\tau)}$

b) $\Gamma = \frac{nq^2\tau}{m(1+\omega^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}}$ Γ diminue quand ω augmente.

Basse fréquence : $\Gamma \rightarrow \frac{nq^2\tau}{m}$ on retrouve l'expression du régime permanent

Haute fréquence : $\Gamma \rightarrow 0$

Allure de Γ en fonction de la pulsation :



La pulsation de coupure Ω_c est telle que $\Gamma = \frac{\Gamma_{max}}{\sqrt{2}}$, soit $\frac{nq^2\tau}{m(1 + \Omega_c^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{nq^2\tau}{m\sqrt{2}}$

D'où $\Omega_c = \frac{1}{\tau} = 1,38.10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$

A2 Effet de peau

A21 Equations de Maxwell

$$\text{a) } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{div}\vec{E} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_o(\vec{j} + \epsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \quad \text{div}\vec{B} = 0$$

si $\gamma \gg \epsilon_o\omega$ alors $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \approx \mu_o\vec{j}$, ce qui revient à négliger le courant de déplacement par rapport au courant de conduction dans le métal.

b) ARQS

c) Pas de courant surfacique puisqu'il y a pénétration de l'onde électromagnétique dans le métal, c'est-à-dire diminution progressive de la densité volumique de courant.

La relation de discontinuité du champ magnétique s'écrirait, en présence d'une densité surfacique de courant : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_o\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$

Le champ magnétique est donc ici continu en $z = 0$.

A22 Onde transmise

$$\text{a) } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ d'où } \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu_o\vec{j}$$

$$\text{D'où } \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \mu_o\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \text{ avec l'onde transmise telle que } \vec{E}_t = \underline{f}(z)e^{i\omega\vec{u}_x}$$

$$\text{On en déduit l'équation différentielle : } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - i\omega\mu_o\gamma f = 0$$

b) La solution générale de cette équation est $\underline{f}(z) = \underline{f}_1 e^{-\alpha z} + \underline{f}_2 e^{\alpha z}$
 avec $\alpha = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\omega \mu_o \gamma} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu_o \gamma}{2}}$ le champ électrique ne pouvant diverger

dans le métal, on a $\underline{f}_2 = 0$ et la solution se ramène à $\underline{f}(z) = \underline{f}_1 e^{-\alpha z}$

la continuité du champ électrique en $z = 0$ entraîne $\underline{f}_1 = E_{t0}$

d'où $\underline{E}_t(z, t) = E_{t0} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \underline{u}_x$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o \gamma \omega}}$

Le champ électrique est la partie réelle de l'expression complexe :

$$\vec{E}_t(z, t) = E_{t0} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

δ a la dimension d'une longueur. C'est l'épaisseur de peau.

AN $\delta = 8,27 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

A23 Discussion

a) δ diminue quand ω augmente.

Pour un conducteur parfait, $\gamma \rightarrow \infty$ et $\delta \rightarrow 0$

b) $\vec{E}_t(z, t) = E_{t0} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{u}_x = E_{t0} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$; en posant $\underline{k} = k' + ik''$ l'identification des parties réelles et imaginaires donne $k' = \frac{1}{\delta}$ et $k'' = -\frac{1}{\delta}$

A3 Rappels sur le solénoïde long

A31 Bobine en régime continu

a) $B = \mu_o n i = \mu_o \frac{N}{D} i$

b) Flux propre : $\Phi_p = B S N = \mu_o \frac{N^2}{D} i \pi r^2 = L i$ d'où $L = \mu_o \frac{N^2}{D} \pi r^2$

c) $\Phi = B S' N' = \mu_o \frac{N}{D} \pi r'^2 N' i = M i$ d'où $M = \mu_o \frac{\alpha \pi r'^2}{D}$ avec $\alpha = N N'$

d) Résultats non modifiés dans l'ARQS

A32 Bobine en régime variable

a) La loi des branches donne $e = (R + R_G) i + L \frac{di}{dt}$

En régime sinusoïdal permanent établi : $\underline{e} = (R + R_G) \underline{i} + i L \omega \underline{i}$

D'où $i(t) = \frac{E_m \cos(\omega t)}{\sqrt{(R + R_G)^2 + L^2 \omega^2}}$ et $\tan \varphi_e = \frac{L \omega}{R + R_G}$

$$b) \frac{U_L}{U_e} = \frac{iL\omega}{R + R_G + iL\omega} = \frac{i \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}} \text{ avec } \omega_c = \frac{R + R_G}{L}$$

On peut par ailleurs poser $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ la fonction de transfert s'écrit alors

$$\underline{H} = \frac{ix}{1 + ix} \text{ et } G_{dB} = 20 \log H ; \text{ il s'agit d'un filtre passe haut.}$$

B_1/ A faible fréquence B_{int} et B_{ext} sont très proches puis si f augmente B_{int} décroît .

E_{int} est à faible et a haute fréquence très faible devant E_{ext} . A 10^6 Hz on obtint un max pour E_{dB} .

$$B_2 / \overrightarrow{rot \vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ et } 2E_{int} \frac{L}{2} = -i\omega B_{int} S$$

B_3/ BF : E_{int} tend vers 0 et B_{int} vers B_0 à basses fréquences.

$$B_4 / B_{int} = \frac{LB_0}{\sqrt{L^2 + (\omega\mu_0 hS)^2}} \text{ soit } \omega_c = \frac{L}{\mu_0 hS} \text{ AN } \omega_c = 358 \text{ rad.s}^{-1} \text{ soit } f_c = 57 \text{ Hz}$$

B-5/ Les allures sont semblables mais avec des valeurs numériques distinctes.

C_1_1/ Jusqu'à 10^3 Hz la tension induite $U_{1,eff}$ augmentent f , avec ou sans blindage. Sur le deuxième graphe on voit que le rapport des tensions est égal à 1.

Ensuite les comportements diffèrent avec une tension efficace qui n'évolue plus lorsque la fréquence augmente (A), et une tension efficace qui diminue avec f dans le cas du blindage.

C_1_2 / $\delta \approx 8.10^4 m$, l'effet de peau n'est pas en cause à cette fréquence. A plus haute fréquence (calcul déjà effectué pour 1MHz) l'effet de peau existe.

$$C_1_3 / U_{1,eff,A} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\mu_0 \frac{N_2}{D} I_2 N_1 \pi r_1^2)}{dt} = -i\omega I_M \mu_0 \frac{N_2}{D} N_1 \pi r_1^2$$

$$i_M = \frac{E_M}{\sqrt{(R + R_G)^2 + (\omega L)^2}} \text{ on obtient donc } \omega_c = \frac{R + R_G}{L}, K_1 = \mu_0 \pi r_1^2 \frac{N_1 N_2}{D} \text{ et } K=L$$

$$C_1_4 / \frac{U_{1,eff}}{E_G} \rightarrow 0 \text{ si } \omega \rightarrow 0, \omega_c = 620 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$C_2_1/a) \overrightarrow{rot \vec{E}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, B \text{ est porté par l'axe } Oz \text{ et l'étude des invariances montre que } E(r).$$

D'où l'expression des courants dans un matériau ou la loi d'Ohm locale s'applique

b) La modélisation des courants est volumique ce qui exclu la modélisation surfacique. Les champs

sont donc continus en r_c et $r_c + \varepsilon$: $\overrightarrow{rot E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, $\Rightarrow \oint \overrightarrow{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \overrightarrow{B} \cdot d\vec{S}$ soit

$$\frac{j}{\gamma} 2\pi(r_c + \varepsilon) = -\frac{d(B_{int} \pi(r_c + \varepsilon)^2)}{dt} , j = -i\omega\gamma B_{int}(r_c + \varepsilon) * \frac{1}{2}$$

c) Dans ce cas on peut écrire $j_s = jh$ donc $\alpha = \frac{h\gamma}{2} r_c$

$$d) \overrightarrow{B}_{ext} - \overrightarrow{B}_{int} = -i\omega\mu_0\gamma h \frac{r_c}{2} B_{int} \overrightarrow{e}_\theta \wedge \overrightarrow{e}_r \Rightarrow \frac{B_{ext}}{B_{int}} = 1 + \mu_0 i\omega\gamma h \frac{r_c}{2}$$

$$\Omega_c = \frac{2}{\mu_0 h r_c \gamma}$$